Devoir Maison 2

Intégration et formule de Stirling

À rendre pour le : **jeudi 9 janvier 2025**

Problème :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $F_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2^n \mathrm{d}x}{(e^x + e^{-x})^n}$. Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}$$

Partie I — Questions préliminaires

1. Pour tout entier $n \geq 2$, soient $u_n = \ln\left(\dfrac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}\right)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{2(n-1)}$ $(n \geq 2)$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_n^{n+1} (x-n)(n+1-x) \times \frac{1}{2x^2}\,\mathrm{d}x$; on la notera I_n.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln n) - 1 \leq \dfrac{1}{2n^2}$.

c) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes.

d) En déduire qu'il existe $\ell > 0$ tel que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n\sqrt{n}}{\ell e^n}.$$

Partie II — Suite F_n

2. a) Montrer que l'intégrale F_n est bien convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $F_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Étudier la monotonie de la suite (F_n).

3. a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; en déduire que $F_2 = 1$.

b) À l'aide du changement de variable $u = e^x$, montrer que $F_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

4. a) Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$(e^x - e^{-x})^2 = (e^x + e^{-x})^2 - c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et la déterminer.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}F_n$. *(On pourra faire une intégration par partie en reconnaissant des fonctions connues dans le problème.)*

5. En déduire :

a) que $(nF_{n+1}F_n)$ est une suite constante et déterminer la valeur de $nF_{n+1}F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$F_{2n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

6. a) Déduire des questions 2 et 4 que $F_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} F_n$. *(On pensera à encadrer $\frac{F_{n+1}}{F_n}$.)*

b) En déduire ensuite à l'aide de la question 5 que $F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Conclusion

7. **a)** Montrer que

$$F_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell\pi}{\sqrt{2n}}$$

b) En déduire la formule de STIRLING : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}$.